TD n°4: Principe du maximum et lemme de Schwarz

Analyse complexe 2024-2025, Thomas Serafini
tserafini@dma.ens.fr

Exercices à faire en priorité : 1-2-4-5-7-9-11. Les exercices marqués d'un [1] sont des exercices plus difficiles, plus longs, ou plus loin du cours.

Formule de Cauchy

Exercice 1. Quelques applications de la formule de Cauchy.
Pour f fonction holomorphe définie sur un disque centré en zéro, on pose $M(r) = \sup_{|z|=r} |f(z)|$

1. Soit $f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ holomorphe. Démontrer que pour tout $r < 1$, on a $M(r) \geqslant r|f'(0)|$
2. Soit $f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ holomorphe, on pose $C := \limsup_{n\to\infty} M\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{1/n}$. Montrer que f s'étend à $\mathbb{D}(0, 1/C)$.
3. Démontrer que pour $\rho < r$, on a
$$M(\rho) \leqslant \frac{rM(r)}{r-\rho}.$$

Exercice 2. Majoration de coefficients de Taylor
Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $\geqslant 1$, on note f la fonction sur $\mathbb{D}$ associée. Supposons que pour tout $z \in \mathbb{D}$, on a $|f(z)(1-|z|)| \leqslant 1$.

1. Montrer que pour tout $r < 1$, $n \geqslant 0$, on a
$$|a_n| \leqslant \frac{1}{r^n(1-r)}$$
2. En déduire pour tout $n \geqslant 1$, on a
$$|a_n| < (n+1)e.$$
La constante e est-elle optimale ?

Exercice 3. Le théorème de Paley-Wiener
Soit φ une fonction C^∞ à support compact inclus dans $[-A, A]$ avec $A > 0$.

1. Démontrer que la transformée de Fourier
$$\hat{\varphi}(z) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x)e^{-izx}dx$$
est une fonction entière vérifiant l'estimation suivante : pour tout $N \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$, il existe une constante $C_N > 0$ telle que
$$|\hat{\varphi}(z)| \leqslant C_N(1+|z|)^{-N}e^{A|\Im(z)|}$$
2. Soit à présent f une fonction entière qui vérifie l'estimation précédente. On va démontrer que sa transformée de Fourier est une fonction C^∞ à support compact inclus dans $[-A, A]$.
   (a) Démontrer que la transformée de Fourier de f est C^∞ sur $\mathbb{R}$.
   (b) Soit $x > 0$. Démontrer à l'aide de la formule de Cauchy que pour tout $T > 0$, on a :
$$\hat{f}(x) = \int_{\mathbb{R}} f(z)e^{-ixz}dz = e^{-xT}\int_{\mathbb{R}} f(z-iT)e^{-ixz}dz.$$
   (c) En faisant tendre $T \to \infty$, démontrer que si $x > A$, alors $\hat{f}(x) = 0$ et conclure.

---

[1] Merci à Hadrien pour ce raton-laveur en Tikz !

Principe du maximum et théorème de Liouville

Exercice 4. Autour du principe du maximum.

1. Soit f une fonction holomorphe définie au voisinage de $\overline{\mathbb{D}}(0,1)$ vérifiant $f(0) = 1$ et $|f(z)| > 1$ pour $|z| = 1$. Démontrer que f admet un zéro dans $\mathbb{D}(0,1)$

2. (a) Soit U un ouvert connexe de $\mathbb{C}$ et $f_1, ..., f_n : U \to \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\leqslant 0}$ des fonctions holomorphes. On prend des nombres réels $\alpha_1, ..., \alpha_n$. Démontrer que si

$$z \mapsto \prod_{j=1}^{n} |f_j(z)|^{\alpha_j}$$

admet un maximum local, alors elle est constante.

   (b) Même question en remplaçant $f_j : U \to \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\leqslant 0}$ par $f_j : U \to \mathbb{C}^*$.

3. Soit U un ouvert connexe et $f \in \mathcal{O}(U)$. En considérant $z \mapsto e^{f(z)}$, démontrer un principe du maximum pour $\Re(f)$, c'est-à-dire que si $\Re(f)$ admet un maximum local sur U, alors f est constante.

Exercice 5. Croissance comparée de fonctions entières.
Soient f, g des fonctions entières vérifiant $|f(z)| \leqslant |g(z)|$ pour tout $z \in \mathbb{C}$. Démontrer que $f = \lambda g$ pour un certain λ.

Exercice 6. L'inégalité de Carathéodory.
Soit f une fonction entière. On pose

$$M(r) = \sup_{|z|=r} |f(z)|,\ A(r) = \sup_{|z|=r} \Re f(z).$$

1. Démontrer que M et A sont des fonctions continues croissantes de r, et qu'elles sont strictement croissantes si f n'est pas constante (on pourra se rappeler que $\Re f$ vérifie aussi le principe du maximum).

2. Supposons que $f(0) = 0$. On définit g par

$$g : z \mapsto \frac{f(2rz)}{2A(2r) + \varepsilon - f(2rz)}.$$

Démontrer que g envoie le disque unité dans lui-même.

3. Démontrer à l'aide du lemme de Schwarz que $M(r) \leqslant 2A(2r)$

4. Démontrer que si f est une fonction entière telle qu'il existe des constantes A, K, α telles que

$$\Re f(z) \leqslant A|z|^{\alpha} + K$$

pour z assez grand, alors f est un polynôme.

Exercice 7. Autour du théorème de Liouville.

1. Soit $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ vérifiant $f^{(k)}(0) = 0$ pour $k = 0, ..., N$ et $|f(z)| \leqslant C|z|^N$ pour $|z| >> 0$. Démontrer que f est nulle.

2. Soit $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ à croissance polynomiale, c'est-à-dire qu'il existe $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $|f(z)| \leqslant P(|z|)$ pour tout $z \in \mathbb{C}$. Démontrer que f est un polynôme.

3. Soit f une fonction entière qui ne s'annule pas, et vérifiant qu'il existe des constantes $C, A > 0$ telles que

$$|f(z)| \leqslant Ce^{A|z|^d}$$

pour tout z assez grand. Démontrer que $f(z) = e^{P(z)}$ pour P polynôme de degré $\leqslant d$ (on pourra utiliser la dernière question de l'exercice précédent).

4. Démontrer que pour tout $P \in \mathbb{C}[X]$, l'équation $e^z = P(z)$ admet une infinité de solutions.

Exercice 8. Théorème des trois cercles et des trois droites d'Hadamard

1. Soit r_1 et r_2 deux réels positifs et f une fonction holomorphe définie sur l'anneau $\{z \in \mathbb{C},\ r_1 < |z| < r_2\}$ et s'étendant continument à son adhérence. Pour tout $r \in [r_1, r_2]$, on note:

$$M(r) = \sup_{|z|=r} |f(z)|.$$

On veut montrer que $\log M$ est une fonction convexe de $\log(r)$.

   (a) Démontrer que $\log M$ est une fonction convexe de $\log(r)$ si, et seulement si pour $r < R$, $\rho \in [r, R]$, on a

$$\log M(\rho) \leqslant \frac{\log(\rho) - \log(r)}{\log(R) - \log(r)} \log M(R) + \frac{\log(R) - \log(\rho)}{\log(R) - \log(r)} \log M(r).$$

   (b) Démontrer pour $\beta \in \mathbb{Q}$, on a

$$\rho^\beta M(\rho) \leqslant \max\left(r^\beta M(r), R^\beta M(R)\right).$$

   En déduire que la même égalité est vraie pour tout $\beta \in \mathbb{R}$.

   (c) Conclure en appliquant le lemme précédent à un α tel que $r^\alpha M(r) = R^\alpha M(R)$.

2. Soient x_1 et x_2 deux réels et f une fonction holomorphe sur $B = \{z \in \mathbb{C},\ x_1 < \Re(z) < x_2\}$, bornée et s'étend continument à $\overline{B}$. Pour tout $x \in [x_1, x_2]$, on note:

$$M(x) = \sup_{\Re(z)=x} |f(z)|.$$

On va prouver que $\log M$ est une fonction convexe de x.

   (a) Démontrer qu'il suffit de montrer que dans le cas $x_0 = 0, x_1 = 1$, on a

$$M(t) \leqslant M(0)^{1-t} M(1)^t.$$

   (b) Prouver le résultat dans ce cas en considérant la fonction holomorphe

$$z \mapsto \frac{f(z)}{M(0)^{1-z} M(1)^z (1 + \varepsilon z)}.$$

3. Prouver le théorème des trois cercles à partir du théorème des trois droites en considérant $z \mapsto f(e^z)$ sur une bande appropriée.

Lemme de Schwarz

Exercice 9. Variations du lemme de Schwarz.
Soient $M \geqslant 0$, $\mathbb{D}$ le disque unité, $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \in \mathcal{O}(\mathbb{D})$.

1. Supposons que $|f(z)| \leqslant M$ sur $\mathbb{D}$. Montrer que pour tout $z \in \mathbb{D}$ on a

$$|f'(z)| \leqslant \frac{M}{1 - |z|}.$$

2. Supposons qu'il existe $k > 0$ tel que $f(0) = f'(0) = ... = f^{(k-1)}(0) = 0$ et que $|f(z)| \leqslant M$ pour tout $z \in \mathbb{D}$. Montrer qu'alors :

$$|f(z)| \leqslant M|z|^k$$

Que peut-on dire s'il existe $a \in \mathbb{D} \setminus \{0\}$ tel que $|f(a)| = M|a|^k$?

3. On suppose que $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$ et $|f(z)| \leqslant M$ sur $\mathbb{D}$. Montrer que pour tout $z \in \mathbb{D}$, on a

$$|f(z)| \leqslant M|z|,\ |f(z) - z| \leqslant (M + 1)|z|^2.$$

4. On suppose que $f(0)=0$, $f'(0)=1$ et $|f'(z)| \leqslant M$ sur $\mathbb{D}$. Montrer que pour tout $z \in \mathbb{D}$, on a

$$|f'(z)-1| \leqslant (M+1)|z|.$$

Montrer à l'aide de l'inégalité des accroissements finis que

$$|f(z)| \leqslant M|z|,\ |f(z)-z| \leqslant \frac{M+1}{2}|z|^2.$$

Exercice 10. Automorphismes du demi-plan de Poincaré.
On note $\mathbb{D}$ le disque unité ouvert et $\mathbb{H}$ le demi-plan supérieur ouvert.

1. On définit $h : \mathbb{D} \to \mathbb{H}$ par

$$h(z) = i\frac{1+z}{1-z}.$$

Démontrer que h est un biholomorphisme de $\mathbb{D}$ sur $\mathbb{H}$, et donner sa réciproque.

2. Démontrer que l'ensemble des biholomorphismes de $\mathbb{H}$ est donné par

$$\mathrm{Aut}(\mathbb{H}) = \left\{ z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}, a, b, c, d \in \mathbb{R}, ad-bc>0 \right\}.$$

Exercice 11. Lemme de Schwarz-Pick.

1. Soit $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ une fonction holomorphe. Démontrer que pour tous $z, w \in \mathbb{D}$, on a

$$\left| \frac{f(z)-f(w)}{1-\overline{f(w)}f(z)} \right| \leqslant \left| \frac{z-w}{1-\overline{w}z} \right|$$

et

$$|f'(z)| \leqslant \frac{1-|f(z)|^2}{1-|z|^2}.$$

Préciser le cas d'égalité.

2. Soit $f : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ une fonction holomorphe. Démontrer que pour tous $z, w \in \mathbb{H}$, on a

$$\left| \frac{f(z)-f(w)}{\overline{f(z)}-f(w)} \right| \leqslant \left| \frac{z-w}{\overline{z}-w} \right|$$

et

$$\frac{|f'(z)|}{\Im f(z)} \leqslant \frac{1}{\Im(z)}.$$

Préciser le cas d'égalité.